# Le filtre géométrique est-il meilleur que le filtre inverse ou que le filtre de Wiener ?

Martin Gaume, Olivier Crave

**Master MVA  
2004-2005**

## 1. Introduction

L'objectif de la restauration d'images est de réduire voire supprimer les effets des dégradations des images. Ces dégradations peuvent venir d'un flou de déplacement, de la présence de bruit, d'une mauvaise mise au point, des perturbations atmosphériques... Dans le cas d'un flou de déplacement seul, nous verrons qu'il est possible de retrouver l'image d'origine. Par contre, si du bruit est présent, le mieux que nous puissions espérer est une diminution des effets des dégradations. Notre étude porte sur la comparaison de trois méthodes de restauration d'images : le [filtre inverse](http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/inv.html), le [filtre de Wiener](http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/wiener.html) et le [filtre géométrique.](http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/geo.html) Ce dernier est une combinaison géométrique des deux premiers.

L'amélioration d'image est effectuée par des méthodes qui ne connaissent pas les dégradations sur les images. Ce n'est pas le cas de la restauration. Ici, les dégradations sont connues et peuvent être modélisées de la façon suivante :

#### Le modèle de dégradation

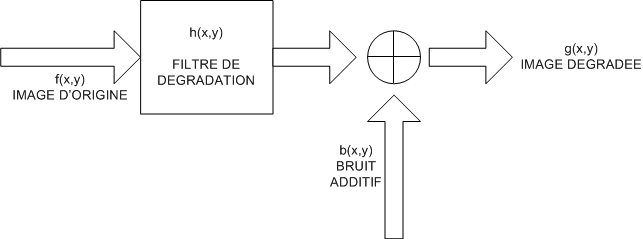


Figure1

Les filtres de restauration permettent de retrouver l'image initiale à partir d'une image préalablement bruitée et dégradée par un opérateur linéaire (voir [Figure 1](http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/index.html#figure1)).

On écrithttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport_html_mceb6392.gifoù g est l'image obtenue après une dégradation par un filtre passe-bas h (une convolution par une fonction h) sur l'image d'origine f suivie d'un ajout de bruit b. g est l'image que l'on veut restaurer.

En pratique, on connait la réponse impulsionelle et certains paramètres du bruit comme la puissance spectrale ou bien la variance du bruit s'il est de type gaussien par exemple.

Pour nos expérimentations, nous avons utilisé deux types de réponses impulsionelles : un *flou directionnel* et un*filtre de moyenne*.Le flou directionnel apparaît lorsque le temps d'exposition de l'appareil de prise de vue est trop faible. Les déplacements des objets observés ne sont plus négligeables : on observe alors la moyenne des points de l'objet suivant la direction de déplacement. Nous avons implémenté ce flou dans deux directions, verticale et horizontale. Cette opération consiste en la convolution de l'image avec une matrice k-ligne ou k-colonne h :

http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport_html_m285fbde8.gifou .

Le filtre de moyenne est reproduit en convoluant l'image avec un masque ne comptant que des 1, de cotés k. Il peut s'obtenir en effectuant successivement deux flous directionnels dans des directions orthogonales.

Le bruit utilisé est un bruit blanc gaussien de variancehttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport2_html_m16749615.gif.

Pour évauler les images résultantes, nous avons calculé le PSNR et le MSE. Le « Peak Signal-to-Noise Ratio » (PSNR) est calculé à partir de l'erreur quadratique moyenne (MSE) :

http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport_html_m5974519f.gif

où M et N sont les dimensions horizontale et verticale de l'image,http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport_html_m73c5ea04.gifethttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport_html_m345f82e6.gifsont respectivement les valeurs du pixel à la position (m, n) pour l'image intiale et pour l'image restaurée. Le PSNRdont l'unité est le dB (décibel) a pour équation : http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport_html_532b8626.gif Une valeur faible du MSEsignifie qu'il y a très peu de différence entre les deux images comparées. Comme le PSNR est calculé à partir de l'inverse du MSE, logiquement, plus la valeur du PSNR est faible et plus les images diffèrent.

Pour nos tests, nous avons utilisé une photographie de Lenna de taille 512x512.

* [>Sommaire](http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/index.html)

**2. Filtre inverse**

Le filtre inverse est le plus simple des filtres. Il ne prend pas en compte le bruit. Dans certaines conditions, il peut donner de très bons résultats. Cependant, si le bruit est trop important ou si la réponse impulsionelle est trop peu inversible pour la convolution, l'utilisation de ce filtre est rédhibitoire.

Le filtre inverse considère quehttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport_html_4ad74938.gif, on cherche h' tel quehttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport_html_60ed3e75.gif. Si h' existe, on ahttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport_html_m4a0bf1f1.gifsoit dans le domaine de Fourierhttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport_html_5ef1478a.gifavechttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport_html_558fdf0e.gif.

Si l'on ne travaille pas en Fourier, on peut dans le cas discret calculer la pseudo-inverse de la matrice associée à h.

En représentation discrète, on peut choisir H' défini par :

Pour tout (u,v) couple d'entiers,

|  |
| --- |
| http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport_html_m2266f9ed.gifsihttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport_html_41a66cc5.gif |
| http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport_html_4953522.gifsinon |

H' défini de cette manière existe toujours.

Le filtre inverse est le meilleur pour déconvoluer une image non bruitée. L'image restaurée est presque identique à l'image d'origine (voir [Figure 2](http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/inv.html#figure2)).

|  |  |
| --- | --- |
| http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/image.jpg Image d'origine | http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport_html_3ebe734b.jpg Image convoluée, PSNR = 14,36 |
| http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport_html_m5545c34b.jpg Filtre inverse, PSNR = 46,41 | |

Figure 2

Mais dans la réalité, le bruit n’est jamais rigoureusement nul. Lorsque H(u,v) devient très petit, c'est à dire vers les hautes fréquences, le résultat de la fonction inverse est très élevé. C'est justement dans les hautes fréquences que le bruit est présent. Il est donc amplifié par l'action du filtre inverse et le résultat est souvent illisible (voir [Figure 3](http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/inv.html#figure3)).

|  |  |
| --- | --- |
| http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/image.jpg Image d'origine | http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/noisy1.jpg Image convoluée et bruitée, PSNR = 19,33 |
| http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/finv1.jpg Filtre inverse, PSNR = 7,18 | |

Figure 3

De plus, H(u,v) peut s’annuler pour certaines fréquences. H'(u,v) devient alors infiniment grand et non réalisable. Il est donc nécessaire d'utiliser un seuil limite au dessus duquel la valeur de H(u,v) est forcée à prendre la valeur du seuil.

De plus, H(u,v) et G(u,v) peuvent s’annuler simultanément pour certaines fréquences : F(u,v) est alors une fonction indéterminée.

Il est cependant possible de restaurer en partie l'image en choisissant une bonne valeur du seuil, mais les résultats ne sont généralement pas très bons dès lors que le bruit est un tant soit peu important (voir [Figure 4](http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/inv.html#figure4)).

|  |  |
| --- | --- |
| http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/image.jpg Image d'origine | http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/noisy1.jpg Image convoluée et bruitée, PSNR = 19,33 |
| http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/finv2.jpg Filtre inverse avec un seuil plus élevé, PSNR = 12,25 | |

Figure 4

Dans cet exemple, l'image obtenue reste de plus mauvaise qualité que l'image dégradée (PSNR<19,33).

Nous pouvons conclure que le filtre inverse n'est pas pas utilisable en pratique. Il est beaucoup trop sensible au bruit. ?

## 3. Filtre de Wiener

Le filtre inverse est une technique très utile pour la déconvolution mais il ne prend pas en compte le bruit. Le filtre de Wiener lui, ne caractérise pas le signal et le bruit par leur forme analytique mais par leurs propriétés statistiques. On considère que les images sont des réalisations d'un processus aléatoire stationnaire : on cherche alors à minimiser la moyenne du carré de la différence entre l'image initiale et l'image restaurée.

On note http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport2_html_m34b8b2.gif

On suppose que pour touthttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport2_html_4a8c7722.gif , b(x) suit une même loi de probabilité P. Pour tester ce filtre nous avons choisi P de loi gaussienne.

On veut minimiserhttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport2_html_3cf4076c.gif.

D'après Parseval on ahttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport2_html_m7f4e14b2.gif

En permutant les deux intégrales grâce à Fubini, on ahttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport2_html_m7f86ce83.gif

Il suffit de minimiserhttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport2_html_2a1fda6e.gifpour touthttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport2_html_21335b7c.gif,

ce qui revient à trouver le minimum d'une fonction http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport2_html_5fdcf062.gif

où a et b sont des constantes (http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport2_html_m60b65e0b.gifethttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport2_html_m6d06cdb0.gif).

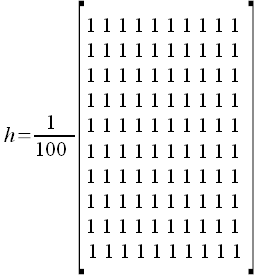
Après calculs, on trouvehttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport3_html_1ee843df.gifoù A est le complexe conjugué de H ethttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport3_html_m4be369bf.gifdésigne le rapport de la densité de puissance du bruit sur celle du signal F.

Pour implémenter le filtre de Wiener, nous devons être en mesure d'estimer correctement la puissance spectrale de l'image d'origine et du bruit. Pour un bruit blanc gaussien, la puissance spectrale est égale à la variance du bruit. Une estimation possible de la puissance spectrale de l'image d'origine qui mène à une implémentation en cascade du filtre inverse et de la réduction du bruit découle du calcul à partir du paramètrehttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport3_html_m52907b99.gifde la corrélation de l'image. On a alors :

http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport3_html_m79de0ea.gif.

#### Résultats

Nous avons convolué cette image par le filtre passe-bas suivant :



Puis nous avons ajouté à l'image issue du produit de convolution un bruit blanc gaussien de variance 0.01. Le filtre de Wiener est réalisé par une implémentation en cascade, l'atténuation du bruit est suivie par un filtrage inverse. Le résultat est visible dans la [Figure 6](http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/wiener.html#figure6).

|  |  |
| --- | --- |
| http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/image.jpg Image d'origine | http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/noisy3.jpg Image convoluée et bruitée, PSNR = 16,86 |
| http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/finv4.jpg Filtre inverse, PSNR = 7,41 | http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/fwin2.jpg Filtre de Wiener, PSNR = 22,05 |

Figure 6

Dans le cas général, le filtre de Wiener donne de meilleurs résultats que le filtre inverse car il n'augmente pas trop les hautes fréquences liées au bruit.

**4. Filtre géométrique**

Le filtre géométrique est la moyenne géométrique des filtres inverse et de Wiener. Sa formulation est la suivante :

http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport3_html_355ac6fb.gifoù A est le complexe conjugué de H ethttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport3_html_m4be369bf.gifdésigne le rapport de la densité de puissance du bruit sur celle du signal F.

Pourhttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport2_html_e649755.gif, on retrouve le filtre de Wiener. Pourhttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport2_html_1fb2262c.gif, on retrouve le filtre inverse.

Pourhttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport2_html_388c6823.gif, le filtre réalise une moyenne géométrique entre les deux filtres. La [Figure 7](http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/geo.html#figure7) nous montre un exemple d'utilisation du filtre géométrique.

|  |  |
| --- | --- |
| http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/noisy2.jpg Image convoluée et bruitée, PSNR = 18,73 | http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/finv3.jpg Filtre inverse, PSNR = 7,16 |
| http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/fwin1.jpg Filtre de Wiener, PSNR = 19,60 | http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/fgeo1.jpg Filtre géométrique, PSNR = 14,18 |

Figure 7

Si l'image n'est pas bruitée, le filtre de Wiener est égal au filtre inverse. Le filtre géométrique est alors également égal au filtre inverse. Si au contraire l'image est bruitée, le filtre géométrique, en effectuant la moyenne entre les deux filtres, ne donne pas de meilleurs résultats que le filtre de Wiener ; ce dernier étant optimal pour réduire le terme d'erreur quadratique moyenne par rapport à l'image d'origine. Le filtre géométrique ne fait qu'amplifier les hautes fréquences générées par l'application du filtre inverse sur l'image dégradée.

Cependant, en utilisant le filtre géométrique, il est possible de gagner jusqu'à 1 dB sur le PSNR lorsque le bruit est présent en très faible quantité (un bruit gaussien de variance quasi nulle, de l'ordre dehttp://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/rapport2_html_m7d6396fb.gif). Mais, dans cette configuration, les images restaurées sont tellement proches de l'originale que les différences ne sont plus visibles à l'oeil nu.

## 5. Conclusion

Nous avons vu que le filtre inverse est un moyen très simple à mettre en oeuvre et très efficace pour restaurer des images à condition que l'on connaisse la réponse impulsionnelle et que l'on n'ait pas de bruit. Comme le filtre inverse est un filtre passe-haut, il aura tendance à l'amplifier.

Le filtre de Wiener nous semble être le meilleur filtre parmi les trois. Contrairement au filtre inverse, il prend en considération le bruit et n'amplifie pas trop les hautes fréquences associées. Sans la présence de bruit, le filtre de Wiener est équivalent à un filtre inverse. On peut donc l’employer dans tous les cas.

Le filtre géométrique ne nous semble pas être une très bonne alternative. Il n'est pas aussi efficace que le filtre de Wiener pour restaurer des images bruitées, car dans ce cas, l'influence du filtre inverse ne peut être que négative sur ses résultats. Cependant, en utilisant le filtre géométrique, il est possible de gagner jusqu'à 1 dB sur le PSNR lorsque le bruit est présent en très faible quantité.

#### Références

* Polycopié « Le traitement des images », Tome 1, Chapitre 6, page 69.

## 6. Programme Matlab

La fonction projetfiltre applique le filtre inverse, le filtre de Wiener et le filtre géométrique sur une image convoluée puis bruitée.

#### Syntaxe

projetfiltre(I,sbox,type,sigma,alpha)

#### Description

projetfiltre(I,sbox,type,sigma,alpha) réalise la convolution de l'image I avec un filtre passe-bas de taille sbox et de type type, ajoute un bruit blanc gaussien de variance sigma puis applique les filtres inverse, de Wiener et géométrique avec un coefficient alpha de valeur alpha sur l'image dégradée. type est une chaîne de caractères qui peut prendre une de ces valeurs :

|  |  |
| --- | --- |
| **Valeur** | **Description** |
| 'horizontal' | Flou dans la direction horizontale |
| 'vertical' | Flou dans la direction verticale |
| 'carre' | Filtre de moyenne |

#### Formats supportés

La fonction accepte tous les formats d'image supportés par Matlab. Leur type peut être de classe uint8,uint16, int16, single, ou double. Les images RVB sont converties en niveaux de gris.

#### Exemples

projetfiltre('cameraman.tif',4,'carre',0.01,0.5)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/cameraman.jpg Original | http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/camnoisy.jpg Image convoluée et bruitée, PSNR = 17,29 | http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/caminv.jpg Filtre inverse, PSNR = 7,48 | http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/camwin.jpg Filtre de Wiener, PSNR = 19,03 | http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/camgeo.jpg Filtre géométrique, PSNR = 14,12 |

#### Téléchargement

[projetfiltre.m](http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/projetfiltre.m)

http://www.tsi.telecom-paristech.fr/pages/enseignement/ressources/beti/filt-geom/prog.html